К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ СТАТИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ ШПИНДЕЛЯ СТАНКА

Н.В.Захаров, проф.; В.Т.Акимов,* доц.; Мельниченко А.А.*,доц.; В.К.Науменко,* доц.
*(*Украинская инженерно-педагогическая академия, г.Харьков)*

В качестве статической характеристики упругой технологической системы (станок, приспособление, инструмент, деталь) широкое распространение получило понятие жесткость - отношение составляющей усилия резания, направленной по нормали к обрабатываемой поверхности, к суммарной, отсчитываемой в том же направлении деформации системы, вызванной усилиями резания. Жесткость шпиндельного узла станка особенно влияет на точность и качество обработки [1].

Высокие требования к точности станков вызывают необходимость создания методов расчета жесткости шпинделя, учитывающих все его особенности (переменность сечения, линейные и угловые жесткости опор при любом их количестве и т.д.)

В данной работе показана методика определения перемещений шпинделя станка, основанная на методе конечных элементов (МКЭ) в сочетании с матричным методом начальных параметров (ММНП), учитывающая все ранее перечисленные особенности.

В качестве конечного элемента (КЭ) принят круглый стержень (в общем случае полый) с линейными и угловыми податливыми опорами на концах i-1 и i, имеющий длину l_i, момент инерции поперечного сечения J_i-J отв, площадь сечения A - $A_{отв}$, где $J_{отв}$ и $A_{отв}$ соответственно осевой момент инерции и площадь отверстия. Материал элемента имеет модуль упругости I-го рода - E_i.

При расчете делается предположение, что станина, на которой крепится узел, обладает значительно большей жесткостью по сравнению со шпинделем и опорами [1]. Внешнюю заданную нагрузку рассматриваем как совокупность сосредоточенных сил и моментов, в промежутках между которыми напряженно-деформированное состояние (НДС) КЭ определяется однородным дифференциальным уравнением 4-го порядка [2]:

$$w_i^{IV}(\xi) = 0, \qquad \xi = \frac{x}{l_i}, \tag{1}$$

где $w_i(\xi)$- линейное перемещение (прогиб) i-го КЭ;

l_i - длина i-го КЭ.

Представим решение уравнения (1) в местной системе координат КЭ в виде

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\cdot C, \tag{2}$$

где $Z_i(\xi)$ - матрица -вектор статических и кинематических параметров в произвольном сечении ξ i-го КЭ;

$B_i(\xi)$ - квадратная матрица 4-го порядка функций и их производных, соответствующих статическим и кинематическим параметрам;

C-матрица-вектор произвольных постоянных.

При $\xi=0$

$$Z_i(0)=B_i(0)C. \tag{3}$$

Для произвольного КЭ

$$Z_i(0)=Z_{i-1}. \tag{4}$$

Тогда

$$C = B_i^{-1}(0)\cdot Z_{i-1}. \tag{5}$$

С учетом (3)-(5) выражение (2) представим в виде

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\cdot B_i^{-1}(0)\, Z_{i-1} \tag{6}$$

или окончательно

$$Z_i(\xi)=K_i(x)\, Z_{i-1}, \qquad 7)$$

здесь

$$K_i(\xi) = B_i(\xi) \cdot B_i^{-1}(0)\ , \qquad (8)$$

где $K_i(\xi)$ - матрица метода начальных параметров, так как $K_i(\xi)=E$;
E - единичная матрица 4-го порядка.
Формула (7) представляет решение уравнения (1) в матричной форме для i-го КЭ.

Таблица 1 - Элементы матрицы $K_i(\xi)$

		$\Phi_1=1$	$\Phi_2=\xi$	$\Phi_3=\frac{\xi^2}{2}$	$\Phi_4=\frac{\xi^3}{4}$
		Z_0			
		w_0	φ_0	M_0	Q_0
Z(ξ)	$w(\xi)$	$K_{ww}=1$	$K_{w\varphi}=\beta_i\cdot\Phi_2$	$K_{wM}=\frac{\beta_i^2}{\alpha_i\delta_i}\cdot\Phi_3$	$K_{wQ}=\frac{\beta_i^3}{\alpha_i^2\delta_i}\cdot\Phi_4$
	$\varphi(\xi)$	$K_{\varphi w}=0$	$K_{\varphi\varphi}=1$	$K_{\varphi M}=\frac{\beta_i}{\alpha_i\delta_i}\cdot\Phi_2$	$K_{\varphi Q}=K_{wM}$
	$M(\xi)$	$K_{Mw}=0$	$K_{M\varphi}=0$	$K_{MM}=1$	$K_{MQ}=K_{wQ}$
	$Q(\xi)$	$K_{Qw}=0$	$K_{Q\varphi}=0$	$K_{QM}=0$	$K_{QQ}=1$

В таблице 1 для матрицы $K_i(\xi)$ принято:

$$\alpha_i = \frac{J_i}{J_0}; \qquad \beta_i = \frac{l_i}{L}; \qquad \delta_i = \frac{E_i}{E_0},$$

где l_i, J_i - длина и осевой момент инерции i-го КЭ;
J_0 - осевой момент инерции любого КЭ;
L - общая длина вала-шпинделя;
E_i - модуль упругости 1-го рода материала i-го КЭ;
E_0 - модуль упругости 1-го рода материала любого КЭ;
w_0, φ_0 и Q_0, M_0 - соответственно кинематические и статические начальные параметры любого КЭ;
$w(\xi)$, $\varphi(\xi)$ и $Q(\xi)$, $M(\xi)$ - соответственно кинематические и статические параметры в произвольном сечении КЭ;
$Z(\xi)$ - матрица-вектор статистических и кинематических параметров в произвольном сечении КЭ;
Z_0 - матрица-вектор начальных параметров
Частное решение неоднородного уравнения при наличии сосредоточенных воздействий на i-й КЭ

$$Z_i(\xi) = K_i(\xi) \cdot Z_{i-1} + F_{Z_i}\left(\xi_i \xi_{F_j}\right), \qquad (9)$$

где $F_{Z_i}(\xi_i \xi_{F_j})$ - матрица-вектор внешних воздействий.

Для системы из n элементов на конце n-го КЭ

$$Z_n(1) = \prod_{i=n}^{i=1} K_i(1)\, Z_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{i+1} K_i(1) \right] \cdot F_{i,j}(1, \xi_{F_j}), \qquad (10)$$

где $\prod_{i=n}^{i=1} K_i(1)$ - произведение n матриц справа налево.

Элементы матрицы К(1) показаны в табл.2, при этом принято:

$$\gamma_{R_{i-1}} = \frac{C_{R_{i-1}} \cdot L^3}{E_0 \cdot J_0}; \quad \gamma_{R_i} = \frac{C_{R_i} \cdot L^3}{E_0 \cdot J_0};$$

$$\gamma_{\varphi_{i-1}} = \frac{C_{\varphi_{i-1}} \cdot L}{E_0 \cdot J_0}; \quad \gamma_{\varphi_i} = \frac{C_{\varphi_i} \cdot L}{E_0 \cdot J_0},$$

где $C_{R_{i-1}}, C_{R_i}$ - соответственно линейные жесткости на концах *i-1* и *i-го* КЭ;

$C_{\varphi_{i-1}}, C_{\varphi_i}$ - угловые жесткости на концах *i-1* и *i-го* КЭ.

Для определения параметров НДС шпинделя необходимо определить начальные параметры. Так как при любом количестве опор задача решается для КЭ со свободными краями на упругих опорах (линейных и угловых), то при $\xi=0$ $M_0=Q_0=0$. Тогда кинематические начальные параметры w_0 и φ_0 находятся из (10) на правом конце шпинделя. После этого параметры НДС для *i-го* КЭ легко определяются по параметрам на *i-1* конце на основании (9).

Таблица 2 – Элементы матрицы $K_i(1)$

	$K_{ww} - \gamma_{R_{i-1}} \cdot K_{wQ}$	$K_{w\varphi} - \gamma_{\varphi_{i-1}} \cdot K_{wM}$	K_{wM}	K_{wQ}
	$K_{\varphi M} - \gamma_{R_{i-1}} \cdot K_{\varphi Q}$	$K_{\varphi\varphi} - \gamma_{\varphi_{i-1}} \cdot K_{\varphi M}$	$K_{\varphi M}$	$K_{\varphi Q}$
$K_i(1)=$	$K_{Mw} - \gamma_{R_{i-1}} \cdot K_{MQ} - \gamma_{\varphi_i} \cdot K_{\varphi w}$	$K_{M\varphi} - \gamma_{\varphi_{i-1}} \cdot K_{MM} - \gamma_{\varphi_i} \cdot K_{\varphi\varphi}$	$K_{MM} - \gamma_i \cdot K_{\varphi M}$	$K_{MQ} - \gamma_{\varphi_i} \cdot K_{\varphi Q}$
	$K_{Qw} - \gamma_{R_{i-1}} \cdot K_{QQ} - \gamma_{R_i} \cdot K_{ww}$	$K_{Q\varphi} - \gamma_{\varphi_{i-1}} \cdot K_{QM} - \gamma_{R_i} \cdot K_{w\varphi}$	$K_{QM} - \gamma_{R_i} \cdot K_{wM}$	$K_{QQ} - \gamma_{R_i} \cdot K_{wQ}$

Для решения задачи по предлагаемой методике разработана программа на языке Бейсик для ПЭМ “Искра”, проверенная на примерах, для которых известны результаты аналитического решения [2]. Результаты, полученные нами на ЭВМ, практически совпадают с известными, что свидетельствует о высокой точности предлагаемого метода.

Таким образом, предлагаемая методика определения перемещений шпинделя станка, основанная на МКЭ в сочетании с ММНП, с использованием ЭВМ дает полное решение задачи для принятой расчетной схемы шпинделя и достаточно надежный результат и рекомендуется для использования в практике инженерных расчетов.

SUMMARY

The method of determination of spindel transference was worked out based on the usage of the methods of final elements and a matrix method of elementary parameters.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов В.И., Локтев В.И. Динамика станков. -Киев: Техника, 1975. -134 с.
2. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов.- Киев: Вища школа, 1986 .- 775 с.